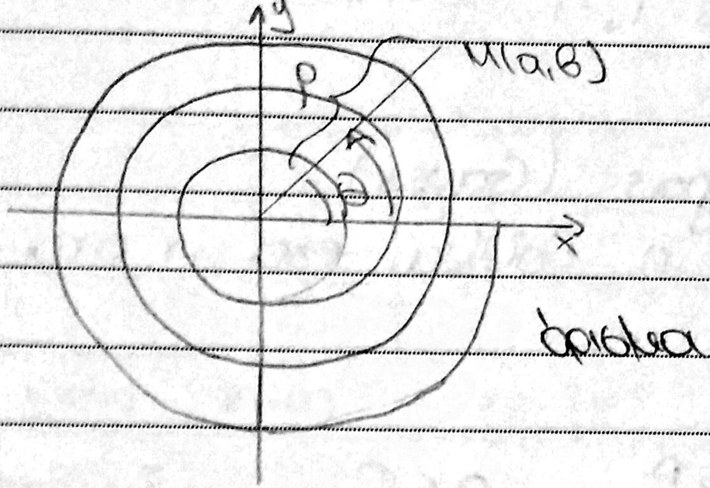
επαναλ.

16/10/2017.

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.



$z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$

$\rho=|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$0\leq\theta<2\pi$ → πρωτεύον όρισμα

$$\left.\begin{array}{l} z_1=\rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1+i\eta\mu\theta_1) \\ z_2=\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2+i\eta\mu\theta_2) \end{array}\right\} \Rightarrow z_1=z_2 \Leftrightarrow \rho_1=\rho_2 \text{ και } \theta_1=\theta_2+2\kappa\pi$$

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2(\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1+\theta_2))$$

Π.χ

$$\frac{1}{συνθ+iημθ} = \frac{συνθ-iημθ}{(συνθ+iημθ)(συνθ-iημθ)} = \frac{συνθ-iημθ}{συν^2θ-(iημθ)^2} = \frac{συνθ-iημθ}{συν^2θ+ημ^2θ} =$$

$$= συνθ - iημθ$$

όρισμα : $= 1\cdot(συν(-θ)+iημ(-θ))$

το υπολογίσαμε πριν.

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{ρ_1(συνθ_1+iημθ_1)}{ρ_2(συνθ_2+iημθ_2)} = \frac{ρ_1}{ρ_2}(συνθ_1+iημθ_1)(συν(-θ_2)+iημ(-θ_2)) =$$

$$= \frac{ρ_1}{ρ_2}(συν(θ_1-θ_2)+iημ(θ_1-θ_2)).$$

Θεώρημα : (De Moivre)

Αν $z=ρ(συνθ+iημθ)$ τότε:

$$z^n=ρ^n(συν(nθ)+iημ(nθ))$$

Π.χ $z^2+1=0$ $\quad Δ=β^2-4αγ=-4.$

$z^2+1 = z^2-i^2 = (z-i)(z+i).$ $\quad$ λύσεις: $i, -i$

Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας (Gauss)

Ορισμός: Κάθε πολυωνυμική εξίσωση n βαθμού έχει n ακριβώς λύσεις στο σύνολο των μιγαδικών.

Π.χ $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_nz^n$, $\quad a_i\in\mathbb{C}$

$f(z)=a_n(z-r_1)(z-r_2)\dots(z-r_n)$, $\quad r_1,r_2,\dots,r_n\in\mathbb{C}$

Π.χ $f(z)=3z^7=3(z-0)(z-0)(z-0)(z-0)(z-0)(z-0)(z-0)$

Π.χ $f(z)=z^n-1=0$

$n=1$ $\quad z-1=0 \Leftrightarrow z=1$

$n=2$ $\quad z^2-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1)=0$ $\quad z_1=1$, $z_2=-1$.

$n=4$ $\quad z^4-1=0 \Leftrightarrow (z^2)^2-1=0$

$(z^2-1)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z+i)(z-i).$ $\quad 1, -1, i, -i$

Θεώρημα:

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $z^n-1=0$ ή $z^n=1$ όπου n θετικός ακέραιος, έχει n ακριβώς διαφορετικές λύσεις που δίνονται από τον τύπο:

$$\boxed{z_k = \sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{n} + i\eta\mu\frac{2k\pi}{n}}, \quad \text{όπου } k\in\{0,1,\dots,n-1\}$$

π.χ $k=0$: $z_0=\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0=1$

$k=1$: $z_1=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{n}+i\eta\mu\frac{2\pi}{n}$

$k=2$: $z_2=\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+i\eta\mu\left(2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$ ⊛

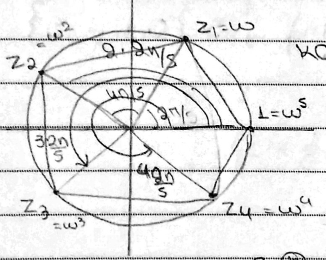
$\vdots$

k: $z_k=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\eta\mu\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$\vdots$

$k=n-1$

π.χ $\boxed{n=5}$: $z^5=1$ ή $z^5-1=0$



κανονική πεντάγωνο

Θέτω $z_1=\omega$: $z_2=\omega^2$ ⊛ και $z_k=\omega^k$.

απόδειξη:

$z^n=1$

Έστω $r\in\mathbb{C}$ ρίζα του $z^n=1 \Rightarrow r^n=1$

$r=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta) \Leftrightarrow (\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta))^n=1 \Rightarrow \rho^n(\sigma\upsilon\nu\theta n+i\eta\mu\theta n) =$

$=1\cdot(\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0)$

$\Rightarrow \rho^n=1$ και $n\theta=0+2k\pi$

$\rho\in\mathbb{R}$, $\rho\geq 0$ $\}$ $\rho=1$, $\theta=\frac{2k\pi}{n}$

$k=0$: $z_0=\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0=1$

$k=1$: $z_1=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{n}+i\eta\mu\frac{2\pi}{n}$ $\qquad k\in\mathbb{Z}$.

$k=k$: $z_k=\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{n}+i\eta\mu\frac{2k\pi}{n}$

$z_{n-1} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$

$z_n = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2n\pi}{n}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2n\pi}{n}\right) = \sigma\upsilon\nu(2\pi) + i\eta\mu(2\pi)$

$k = \lambda n + \upsilon \to$ υπόλοιπο

$0 \leq \upsilon < n$

$z_k = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\eta\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2(\lambda n+\upsilon)\pi}{n}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2(\lambda n+\upsilon)\pi}{n}\right)$

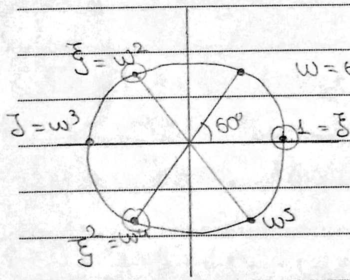
$= \sigma\upsilon\nu\left(2\lambda\pi + \frac{\upsilon 2\pi}{n}\right) + i\eta\mu\left(2\lambda\pi + \frac{\upsilon 2\pi}{n}\right)$

$= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\upsilon 2\pi}{n}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\upsilon 2\pi}{n}\right)$, $\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq \upsilon < n \\ \upsilon \in \{0,1,\dots,n-1\} \end{array}}$

Τα $z_s = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{s 2\pi}{n}\right) + i\eta\mu\left(\frac{s 2\pi}{n}\right)$, $s \in \{0,1,\dots,n-1\}$

ονομάζονται n-οστές ρίζες της μονάδας.

π.χ $z^6 = 1$, $z_s = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{s2\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(\frac{s2\pi}{6}\right)$, $s \in \{0,1,\dots,5\}$



$\omega = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Άσκηση: $z^7 = 1$

$z_s = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{s2\pi}{7}\right) + i\eta\mu\left(\frac{s2\pi}{7}\right) = \omega^s$

$\omega = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\eta\mu\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

(#2)

Άσκηση: 12: (διαδικασία)

Όταν έχω : $z^n = a$ ← $a=0$, $z=0$; $\boxed{a \neq 0}$

$a \neq 0$: $a \in \mathbb{C}$: $a = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\text{συν}\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right) \Leftrightarrow a = z_0^n.$$

$z^n = a \Rightarrow z^n = z_0^n$, $z_0^n \neq 0$.

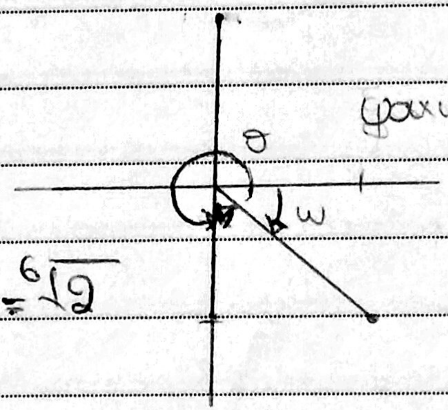
$\Rightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$. δηλ. $\frac{z}{z_0} = \omega^s$, $s \in \{0, \dots, n-1\}$

$\omega = \text{συν}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$$z = z_0 \omega^s \Rightarrow \sqrt[n]{\rho}\left(\text{συν}\frac{\theta}{n} + i\text{ημ}\frac{\theta}{n}\right)\left(\text{συν}\frac{s2\pi}{n} + i\text{ημ}\frac{s2\pi}{n}\right)$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\text{συν}\left(\frac{2s\pi+\theta}{n}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2s\pi+\theta}{n}\right)\right).$$

4.) $z^3 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\text{συν}\left(\frac{7\pi}{2}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right)$ ← ψέτοο



ψάχνω $\hat{\theta}$ ή $\hat{\omega}$ ίδιας είναι

$$z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\text{συν}\left(\frac{2s\pi + \frac{7\pi}{4}}{3}\right) + i\text{ημ}\left(\frac{2s\pi + 7\pi/4}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}$$